

**PANNON EGYETEM
GAZDÁLKODÁSI KAR ZALAEGERSZEG**

A matematikai és a térbeli készségek közötti kapcsolat elemzése

Témavezető: Dr. Szűcs Judit PhD

Külső konzulens: Dr. Guzsvinecz Tibor PhD

**Drizner Beáta
alapképzés
nappali tagozat
Gazdaságinformatikus szak
Logisztikai informatikus
szakirány**

2024.

**PANNON EGYETEM
GAZDÁLKODÁSI KAR ZALAEGERSZEG**

SZERZŐI NYILATKOZAT A DOLGOZAT BENYÚJTÁSÁHOZ*

Hallgató neve:	Drizner Beáta		
Képzési szint:	alapképzés		
Szak:	Gazdaságinformatikus		
Szakirány (ha van):	Logisztikai informatikus		
Neptun kód:	Z4HGOD	Védés éve:	2024
Dolgozat címe:	A matematikai és a térbeli készségek közötti kapcsolat elemzése		
Egyetemi témavezető:	Dr. Szűcs Judit, PhD		
Gyakorlóhelyi konzulens:	Dr. Guzsvinecz Tibor PhD		
Öt kulcsszó a dolgozatról:	matematika, térérzékelés, kognitív képességek, vizualizáció, képességfejlesztés		

Kérjük a szerzői döntésnek megfelelő opciót aláhúzni:

Hozzájárulok / nem járulok hozzá, hogy szakdolgozatomat / záródolgozatomat / diplomadolgozatomat az Egyetem az interneten a nyilvánosság számára repozitóriumában közzétegye.

A hozzájárulás szerzői feltételei:

- a dolgozat magáncélra letölthető, a forrás megjelölésével szabadon idézhető, de az idézés szokásos terjedelmét meghaladó felhasználás (átvétel) tilos,
 - hozzájárulásom időtartamra nem korlátozott és bármikor visszavonható.
- (Hozzájárulás hiányában a dolgozat csak az Egyetem arra kijelölt számítógépein, képernyős megtekintéssel kutatható. Egyéb hozzáférés, többszörözés nem engedélyezett.)

Büntetőjogi felelősségem tudatában nyilatkozom az alábbiakról:

- dolgozatom mindenben eleget tesz a vonatkozó és hatályos intézményi előírásoknak,
- a dolgozatban foglalt tények és adatok a valóságnak megfelelnek, a leírtak saját, önálló munkám eredményei,
- a dolgozatban felhasznált adatokat, forrásokat a szerzői jog figyelembevételével alkalmaztam,
- a dolgozat nem került felhasználásra korábban oktatási intézmény más képzésén felsőoktatási szakképzés, diplomaszerezés vagy szakirányú továbbképzés során.

Tudomásul veszem az alábbiakat:

- a dolgozat szerzői jogtisztaságának ellenőrzésére az Egyetem szoftveres ellenőrzést (plágiumszűrést) végezhet és eredményét a dolgozat értékelésében felhasználhatja,
- a dolgozat elektronikus formában, az Egyetem repozitóriumában kerül elhelyezésre és a hatályos jogszabályok, intézményi szabályzatok szerint, valamint fentebbi szerzői rendelkezéseimnek megfelelően biztosítható a kutatási célú hozzáférése,
- a dolgozat metaadatai és szerzői összefoglalója online nyilvánosak.

Zalaegerszeg, 2024.05.23.

Drizner Beáta s.k.
hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	4
A kutatás indoka és háttere.....	4
A kutatás céljai és kérdései	4
A matematikai és térbeli készségek fontossága az életben	5
A matematikai gondolkodás kialakulása.....	6
A kognitív fejlődés	6
Az absztrakciós képesség	7
A logikai összefüggések felismerése és következtetések levonása.....	7
A következetes és koherens érvek megalkotása és megértése	8
A tanulási tapasztalatok.....	9
Formális oktatás	9
Gyakorlati alkalmazás	10
Egyéni tapasztalatok.....	10
Szociális és kulturális hatások.....	10
A tanulási környezet.....	11
A matematikai gondolkodás és más területek	11
Összegzés	12
Térbeli készségek és fejlődésük	14
Térbeli érzékelés és vizualizáció	14
A térbeli érzékelés fejlődése	15
Térbeli problémamegoldás és térbeli navigáció.....	18
Összegzés	19
A matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolat	20
Elméleti háttér és korábbi kutatások áttekintése	20
Casey, Pezaris & Nuttall, 1992	20
Cheng & Mix, 2014.....	21
Tsui, Venator, Xiaoying, 2014	22
Zhang & Lin, 2017	22
Kinnari, Richard, Terri, Jihyun, Elyssa A., David H., Colleen M., Sheryl A., 2022	23
A két készségterület közötti összefüggések és kölcsönhatások	24
A fejlesztésükben és tanításukban rejlő lehetőségek.....	26
Összegzés	27
Statisztikai elemzés korábbi kutatások alapján	29
A használt szoftver bemutatása	29
Korrelációs elemzés a matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolat vizsgálatára.....	29

Előfeltételek vizsgálata	29
Korrelációs elemzés	32
Eredmények összehasonlítása különböző csoportok között.....	33
Összegzés	34
Értékelés és további kutatási irányok	36
A kutatás korlátjai és hiányosságai	36
Lehetséges további kutatási területek és irányok	36
Összegzés és zárás.....	38
A kutatás főbb eredményeinek összefoglalása.....	38
A kutatás tanulságai és jelentősége a kutatási terület számára.....	38
A további teendők és kilátások a matematikai és térbeli készségek kutatásában	39
Irodalomjegyzék.....	41
SZERZŐI ÖSSZEFOGLALÁS	43

Bevezetés

A kutatás indoka és háttere

Az emberi természet velejárója a kíváncsiság, a mértekre való válasz keresése. Ez viszi előre az emberiséget, ez hajtja az előrehaladást és a fejlődést. A kutatók régóta vizsgálják az emberi elmét, a különböző képességek kialakulását és az ezek közötti összefüggéseket. Nem volt ez másként a matematikai és a térérzékelési képességek tekintetében sem az elmúlt száz évben, amelyeknek az összefüggését vizsgálom jelen szakdolgozatomban.

Személyes kötődésem a szakdolgozatom témájához az, hogy már a középiskolai tanulmányaim alatt is éreztem, hogy bár matematika tantárgyból az algebra nagyon jól ment, a geometria az egyik legnagyobb gyengeségem volt, ez pedig a mai napig sem változott. A különböző vizuális problémamegoldások nehézséget jelentettek, míg egy hosszabb egyenlet több oldalas megoldása könnyen és gyorsan ment. A gyakorlati életben egy-egy sakk játszma alatt ugyanezt éreztem, hogy hiába vagyok tisztában a szabályokkal, lassan látom át, hogy egy lépés hova vezethet. A Tetris és a Lego játékok szintén nem tartoznak a kedvenceim közé, ugyanabból az okból kifolyólag, hogy nem tudom térben elképzelni a különböző elemek elhelyezkedését, forgatását és összekapcsolódását. Sokáig úgy gondoltam, hogy ezek a nehézségek női léteimből származnak és ez egy olyan dolog, amit el kell fogadnom, hogy a térérzékelési képességeim gyengébbek, mint a matematikai képességeim.

A kutatás céljai és kérdései

Jelen dolgozatomban azt vizsgálom, hogy vajon van-e összefüggés a matematikai és térérzékelési készségek között, ha igen, akkor milyen, befolyásolja-e a nem a kettő készség kialakulását és kapcsolatát, valamint, hogy az egyik képesség fejlesztésével a másik képesség is fejlődik-e. Ezen szempontok érdekében először a matematika gondolkodás kialakulását és a matematika képességek típusait vizsgálom, másodszer a térbeli érzékelést és a vizualizációt, valamint a térbeli problémamegoldást és a térbeli navigációt kutatom, majd a matematikai és a térérzékelési készségek közötti kapcsolatról szóló korábbi kutatásokat mutatom be a két készségterület közötti összefüggések és kölcsönhatásokra vonatkozó megfigyelésekkel, valamint fejlesztési lehetőségeket keresek. Ezután korábbi kutatások eredményein végzek statisztikai elemzést, értékelem a kutatási eredményeket és lehetséges további kutatási irányokat keresek.

A hipotézisem az, hogy a két képesség között van valamilyen kapcsolat, még ha nem is erős, és a nem befolyásolja a két képesség közötti kapcsolatot, mégpedig a férfiak javára.

A matematikai és térbeli készségek fontossága az életben

Az élet számos területén szükség van a matematikai és térbeli készségekre, külön-külön és együttesen is. Matematikai képességeinket alkalmazzuk számos mindennapi tevékenységben, például egy bevásárlás során, a háztartás pénzügyeinek a tervezésében, de még főzés közben is. Térbeli készségekre támaszkodunk járművezetés közben, navigáció során, bútor összeszerelés közben vagy lakásberendezés folyamatában. Ezt a két készséget együttesen alkalmazzák a tudományos-technológiai területeken dolgozók nap mint nap, például a mérnöki munka során, ahol a tervezéshez matematikai alapelveket használnak a méretarányok és a térbeli kapcsolatok kiszámításához, egy komplex szerkezet megtervezéséhez. Sőt, az információtechnológia területén is matematikai algoritmusokat alkalmaznak hatalmas mennyiségű térbeli adat elemzésére és feldolgozására, hozzájárulva ezzel az olyan területek fejlődéséhez, mint a földrajzi információs rendszerek és a számítógépes grafika.

Konkrét alkalmazásaikon túl azonban a matematikai és térérzékelési készségek olyan alapvető kognitív képességeket támogatnak, amelyek messzemenően túlmutatnak a tudományos-technológiai területeken. A matematikai gondolkodás elősegíti a logikus gondolkodást, a problémamegoldó készséget és az absztrakt gondolkodást, amelyek felbecsülhetetlen értékeket képviselnek a mindennapi élet és a szakmai élet bonyolult feladatai kezelésében. Hasonlóképpen, a térbeli képességek fejlesztése fokozza a problémamegoldó képességeket és táplálja a kreativitást, lehetővé téve számunkra, hogy innovatív megoldásokat találjunk ki és valósítsunk meg valós kihívásokra.

A két készség ezen felül a tágabb fogalmak és jelenségek, például a gazdasági trendek vagy a földrajzi minták megértésében is fontos szerepet játszik. E készségek kiaknázásával megfejthetünk összetett adathalmazokat, megalapozott döntéseket hozhatunk és előre láthatjuk a jövőbeli fejleményeket, ezáltal képessé válunk a személyes és szakmai életben való boldogulásra.

A matematikai és térbeli képességek integrációja lényegében nem csak a gyakorlati feladatokat könnyíti meg, hanem gazdagítja a világról alkotott véleményünket és növeli kognitív képességeinket. Akár a mindennapi kihívásokban történő eligazodás, akár az összetett technikai problémák megoldása során, e két készségkészlet közötti együttműködés olyan eszközökkel ruház fel minket, amelyekkel sikeresek és innovatívok lehetünk egy egyre összetettebb és összekapcsoltabb világban.

A matematikai gondolkodás kialakulása

A matematikai gondolkodás kialakulása egy olyan összetett és sokrétű folyamat, amelyet egyaránt befolyásol a kognitív fejlődés, a tanulási tapasztalatok és az egyéni élmények sokfélesége. A kognitív fejlődés során az agyban kialakulnak az absztrakciós, logikus gondolkodási és érvelési képességek, amelyek alapvető fontosságúak a matematikai gondolkodás kialakulásában és fejlődésében. Ezek teszik lehetővé az egyén számára, hogy elvont fogalmakat és összefüggéseket tudjon értelmezni és alkalmazni a matematikai problémák megoldásában. A tanulási tapasztalatok és az egyéni élmények, mint például az interaktív játékok vagy a matematikai problémamegoldás, tovább támogatják ezt a folyamatot és lehetővé teszik a gyakorlati matematikai ismeretek elsajátítását és alkalmazását.

A kognitív fejlődés

A kognitív kompetencia olyan rendszer, amely több különböző komponenst foglal magába. Ilyen komponensek például az ismeretek, a rutinok, a készségek és a képességek, valamint a motívumok. A kognitív kompetencia nem csak a készségek és képességek gyűjteménye, hanem sokkal több annál: segít az információk befogadásában, új ismeretek és tudás létrehozásában, valamint az egyén folyamatos fejlődésében és alkalmazkodásában, hogy hatékonyan tudjon navigálni egy változó és kihívásokkal teli környezetben.

A matematikai kompetencia a kognitív kompetencia egyik részrendszerként értelmezhető, azonban egyaránt komponensrendszerként is funkcionál, ami azt jelenti, hogy a matematikai kompetenciában nem csak területspecifikus komponensek vannak jelen, hanem általános, más területeken működő komponensek is befolyásolják. Az olyan alapvető gondolkodási képességek, mint például a logikus gondolkodás, kiemelkedő fontossággal bírnak a matematikai kompetenciában, azonban nem matematika-specifikusak. Ezek az általános komponensek teszik lehetővé, hogy a matematikai gondolkodást a mindennapi életben és más szakterületeken is hasznosítani tudjuk, ennek következtében pedig a matematikai kompetencia fejleszthetősége sem csak a matematika tanulásra korlátozódik. A tanulási tapasztalatok sokfélesége és a különböző kontextusokban történő alkalmazás segíthet a matematikai kompetencia sokoldalú fejlesztésében és elmélyítésében.

Az absztrakciós képesség

Az absztrakciós képesség tükrözi az egyén azon mentális képességeit, amik lehetővé teszik a bonyolult, konkrét információk elvont fogalmakká történő átalakítását és az ezek alapján történő gondolkodást. Ez a képesség számos kognitív folyamatban játszik szerepet, ezáltal az általános értelmi képességek egyik alapvető eleme. Az absztrakciós képesség segítségével az egyén képes elvonatkoztatni a konkrétumoktól, ezáltal az érzékelhető dolgokon túl is képes gondolkodni, és tapasztalatokból általános elveket és szabályokat levonni. Ez a képesség segít az általánosításban is, hogy az egyén képes legyen felismerni a különböző helyzetekben a mintákat, összefüggéseket és törvényszerűségeket. A matematikában az absztrakció teszi lehetővé a különböző szimbólumok és jelképek használatát, valamint az elméleti modellek és hipotézisek alkotását, amelyek segítségével összetett jelenségeket tud megmagyarázni az egyén.

Az absztrakciós képesség fejlettsége határozza meg, hogy az egyén mennyire tud komplex problémákat megoldani, új ötleteket és megközelítéseket kidolgozni, valamint kreatív és kritikus módon gondolkodni. A matematika mellett jelentős szerepe van a mindennapi élet számos területén is, mint például az oktatás, a munkavégzés és a kommunikáció. Az absztrakciós képesség fejlesztésére magyar példa is van, a Kognitív Profil Teszt több területen és életkorban vizsgálja a résztvevők képességeit, információ-feldolgozási készségeit. A teszt több alrészből és feladattípusból áll, amik összetett módon vizsgálják a kognitív képességek területeit, beleértve az absztrakciós képességet is. A Kognitív Profil Teszt eredménye nem csak az egyéni jellemzőket mutatja meg, hanem információt nyújt arról is, hogy a háttérben milyen nehézség húzódik meg, ami a problémákat okozhatja, ezáltal lehetőséget nyújt a célzott egyéni fejlesztésre. A tesztben a vizuális és a verbális absztrakciót egyaránt vizsgálják.

Elmondható, hogy az absztrakciós képesség az egyén általános értelmi képességeinek egyik kulcsfontosságú összetevője. Ez teszi lehetővé, hogy az egyén elvonatkoztasson a konkrét tapasztalatoktól, általánosítsa, szimbólumokat és jelképeket használjon, valamint elméleti modelleket hozzon létre, ezáltal alapvető szerepet játszik a komplex gondolkodási folyamatokban, a problémamegoldásban és az új ismeretek létrehozásában.

A logikai összefüggések felismerése és következtetések levonása

Egy másik alapvető fontosságú kognitív folyamat a logikai összefüggések felismerése és következtetések levonása, amelyek kulcsfontosságúak a racionális gondolkodásban, a problémamegoldásban és a döntéshozatalban. Ez teszi lehetővé az egyén számára, hogy a rendelkezésre álló információk alapján koherens következtetéseket vonjon le, valamint

felismerje az események, tények és fogalmak közötti kapcsolatot. A logikai összefüggések felismerése magában foglalja a mintázatok, struktúrák és kapcsolatok azonosítását az információk között, ezáltal az egyén képes rendszerezni a különböző elemeket, hogy megértse azok összefüggéseit. Az ok-okozati viszonyok megértésével az egyén képessé válik arra, hogy megértse hogyan hatnak egymásra a különböző tényezők és események, valamint, hogy milyen következményekkel járnak ezek az interakciók. A logikai kapcsolatok felismerésével az egyén képes azonosítani az olyan kapcsolatokat, mint az implikáció, konjunkció, diszjunkció és ekvivalencia. A következtetések levonásával az egyén képes deduktív, induktív és abduktív módon következtetni.

A folyamat gyakorlati alkalmazásai közé tartozik a problémamegoldás, a döntéshozatal, a tanulás és az oktatás. A problémamegoldás során a logikai összefüggések felismerése és következtetések levonása alapvető fontosságú. Az egyén képes azonosítani a probléma lényegét, előkészíteni a szükséges lépéseket és logikus következtetéseket levonni a megoldáshoz. Az információk elemzése és logikus következtetések levonása segít, hogy az egyén jól megalapozott döntéseket hozzon. Az oktatásban a logikai összefüggések felismerése és következtetések levonása segít az egyénnek abban, hogy az anyagot mélyebben megértse és elsajátítsa.

A logikai összefüggések felismerése és következtetések levonása az értelmi képességek alapvető elemei, amelyek lehetővé teszik az egyén számára, hogy strukturáltan és következetesen gondolkodjon. Ezek a képességek elengedhetetlenek a hatékony problémamegoldáshoz, a racionális döntéshozatalhoz, és a komplex információk megértéséhez és alkalmazásához.

A következetes és koherens érvek megalkotása és megértése

A következetes és koherens érvek megalkotása és megértése kulcsfontosságú szerepet játszik a hatékony kommunikációban, a problémamegoldásban és a döntéshozatalban. Az érvelés egy olyan folyamat, amely során az egyén logikai és strukturált módon fejezi ki a gondolatait, támogatja állításait és meggyőzi hallgatóságát.

A koherens érvek világos és jól szervezett struktúrával rendelkeznek, az érv minden része logikusan következik az előzőből, és az összes elem összhangban van egymással. A következetes érvek logikai szempontból hibátlanok, nem tartalmaznak ellentmondásokat. Az érvek belső logikája erősíti azok hitelességét és meggyőző erejét. Az érvek egymáshoz kapcsolódnak és egy átfogó, összefüggő gondolatmenetet alkotnak. Az összefüggő gondolatok

segítenek az érvek könnyebb követhetőségében és megértésében. Az érvek egységes témára összpontosítanak és elkerülik a lényegtelen és irreleváns információkat. Ez segít az érvek fókuszálásában és meggyőzőbbé tételében. Az érvelés során az egyén következetesen használja ugyanazokat a fogalmakat és terminológiát, elkerülve a zavaros vagy ellentmondásos kifejezéseket. Az állandóság növeli az érvek érthetőségét és megbízhatóságát. A következetes érvek alátámasztják állításaikat megbízható és releváns bizonyítékokkal. Az erős bizonyítékok jelenléte növeli az érvek hitelességét.

Az érvek megértése során az egyén képes felismerni a logikai összefüggéseket, azonosítani az érvek szerkezetét és értékelni azok koherenciáját és következetességét. Az érvek kritikai értékelése során az egyén megvizsgálja az érvek alapját képező bizonyítékokat, felismeri az esetleges ellentmondásokat, és megítéli az érvek érvényességét. Az érvek megértése során az egyén képes szintetizálni az információkat, összekapcsolni a különböző részeket, és átfogó képet alkotni a témáról.

A koherens és következetes érvek megalkotása és megértése alapvető képességek, amelyek lehetővé teszik az egyén számára, hogy hatékonyan kommunikáljon, meggyőzően érveljen, és kritikai szemmel értékelje mások érveit. Ezek a képességek nemcsak az akadémiai és szakmai életben fontosok, hanem a mindennapi kommunikációban és döntéshozatalban is elengedhetetlenek. A logikai struktúra, az összefüggő gondolatok, az állandóság és az evidenciák használata mind hozzájárulnak ahhoz, hogy az érvek meggyőzőek és érthetőek legyenek, míg a logikai elemzés, a kritikai gondolkodás és a szintetizálás segítik az érvek helyes értelmezését és alkalmazását.

A tanulási tapasztalatok

A tanulási és egyéni tapasztalatok egyaránt fontos szerepet játszanak a matematikai gondolkodás kialakulásában. Ezek a tapasztalatok nemcsak a formális oktatás keretein belül, hanem a mindennapi élet különböző helyzeteiben is jelentős hatással vannak az egyén kognitív képességeinek és matematikai kompetenciáinak fejlődésére.

Formális oktatás

Az óvodai és általános iskolai oktatás során szerzett korai tapasztalatok alapozzák meg a későbbi matematikai képességeket. A játékos tevékenységek, mint a számolós játékok, puzzle játékok és építőköcskák használata mind segítik a gyerekeket az alapvető matematikai fogalmak megértésében. A középiskolai matematika órák során a diákok strukturált és szisztematikus

módon ismerkednek meg a matematikai fogalmakkal, eljárásokkal és problémamegoldó technikákkal. A tanárok szerepe kritikus, mivel ők vezetik be a diákokat a matematikai gondolkodásba, és segítik őket abban, hogy az elméleti ismereteket gyakorlati helyzetekben alkalmazzák.

Gyakorlati alkalmazás

A matematikai gondolkodás fejlesztéséhez elengedhetetlen, hogy a diákok valós életbeli problémákkal találkozzanak, és ezeket matematikai módszerekkel oldják meg, például egy háztartás költségvetésének elkészítése, ahol megtanulják, hogyan kell összegezni a kiadásokat és bevételeket. Az ilyen tapasztalatok segítik a diákokat abban, hogy megértsék a matematika gyakorlati alkalmazhatóságát és ne csak egy feleslegesen megtanulandó tárgynak tekintsék a matematikát. A technológiai fejlődés és interaktív eszközök használata, mint például a matematikai szoftverek, online platformok és alkalmazások, új lehetőséget kínálnak a matematikai gondolkodás fejlesztésére. Ezek az eszközök teszik lehetővé a diákok számára, hogy vizualizálják a matematikai fogalmakat és interaktív módon gyakorolják a problémamegoldást. Talán az egyik leggyakrabban használt matematikai vizualizációs eszköz a Geogebra, aminek a használata segítséget nyújt a geometriai alakzatok vizsgálatához és az algebrai összefüggések megértéséhez. Az online platformok közül a Mateking nyújt támogatást a középiskolai és felsőoktatási matematikai témakörök megértésében és elsajátításában.

Egyéni tapasztalatok

Az egyéni érdeklődés és motiváció kiemelt szerepet játszik a matematikai gondolkodás fejlődésében. Azok a diákok, akik érdeklődnek a matematika iránt, nagyobb valószínűséggel vállalnak önálló tanulást és kihívásokat, ami hozzájárul a mélyebb megértéshez és a készségek fejlődéséhez. Azonban a matematikai gondolkodás nem korlátozódik az iskolában eltöltött évekre, hanem egy egész életen át tartó folyamat. Az élethosszig tartó tanulás keretében szerzett tapasztalatok és ismeretek folyamatosan gazdagítják és fejlesztik a matematikai kompetenciákat.

Szociális és kulturális hatások

A csoportos tevékenységek és együttműködések során szerzett tapasztalatok segítik a diákokat a matematika gondolkodás fejlesztésében. A közös problémamegoldás és az egymástól való tanulás gazdagítja a diákok ismereteit és képességeit. A matematikai szakkörök

és versenyek, ahol a diákok együtt dolgoznak és mérettetik meg tudásukat, kiemelt szerepet töltenek be ebben a folyamatban. Egy másik fontos tényezője a matematikai gondolkodás fejlődésének az a különböző kultúrák matematikai tradíciói és oktatási módszerei. A kulturális háttér meghatározza, hogy a diákok milyen mértékben és hogyan találkoznak a matematikával.

A tanulási környezet

A támogató és ösztönző tanulási környezet segíti a diákokat abban, hogy magabiztosan és motiváltan közelítsenek a matematikai problémákhoz. A pozitív visszajelzések és a hibákból való tanulás lehetősége növeli az önbizalmat és a kitartást. A tanulási környezet rugalmassága és a differenciált oktatás lehetővé teszi, hogy minden diák a saját tempójában és képességei szerint fejlődhessen. Ez különösen fontos a matematikai gondolkodás fejlesztésében, ahol az egyéni különbségek jelentősök lehetnek. Az egyéni tanulási tervek és személyre szabott feladatok alkalmazása a matematika oktatásban megoldást nyújt ezeknek a különbségeknek az áthidalására.

A tanulási tapasztalatok kulcsszerepet játszanak a matematikai gondolkodás kialakulásában és fejlődésében. A formális oktatás keretein belül szerzett tapasztalatok, a gyakorlati alkalmazások, az egyéni és élethosszig tartó tanulás, valamint a szociális és kulturális hatások mind hozzájárulnak a matematikai kompetenciák fejlődéséhez. Az egyén matematikai gondolkodása nem csak a matematikai problémák megoldásában, hanem a mindennapi élet számos területén is hasznosítható, és az élet különböző szakaszaiban folyamatosan fejlődik és gazdagodik.

A matematikai gondolkodás és más területek

A matematikai gondolkodásnak számos területen kiemelkedő szerepe van, nem csupán a matematikában, hanem más tudományos, gazdasági és művészeti területeken is.

A matematikai gondolkodás kulcsfontosságú a tudományos és technológiai problémamegoldásban. A matematika alapvető nyelvet jelent a természeti jelenségek modellezésében és megértésében, valamint a technológiai fejlesztésben. A fizika, kémia és biológia területén matematikai modellek segítségével próbálják megérteni az alapvető törvényeket és összefüggéseket. Az informatikai és mérnöki területeken matematikai módszerekkel terveznek és optimalizálnak rendszereket, algoritmusokat és technológiai megoldásokat.

A matematikai készségek és gondolkodásmód kiemelkedő fontossággal bírnak a gazdasági és pénzügyi területeken. A pénzügyi világ dinamikus működését matematikai modellek segítségével próbálják megérteni és előre jelezni a piaci folyamatokat. A modellek széles skáláját alkalmazzák a részvényárak mozgásának előrejelzésétől a kamatráta változásának elemzéséig. Az algoritmikus kereskedés (HFT – High-frequency trading) matematikai modellek és algoritmusok alkalmazását jelenti a részvények vagy más pénzügyi eszközök gyors és automatizált kereskedésében. Az algoritmikus kereskedés olyan matematikai stratégiákon alapul, amelyek célja a piaci mozgások kihasználása és a rövid távú nyereségek maximalizálása. Ennek során fontos a matematikai modellek pontos és hatékony működése. A matematikai modellek segítségével a vállalatok és befektetők képesek értékelni és kezelni a különböző pénzügyi kockázatokat. Ezeknek a kockázatoknak különböző típusai vannak, mint például a piaci kockázat, hitelkockázat és likviditási kockázat. A matematikai modellek lehetővé teszik a kockázatok kvantitatív értékelését és azok diverzifikálását vagy biztosítását a pénzügyi veszteségek minimalizálása érdekében. Az egyéni pénzügyi tervezés és elemzés során a matematikai eszközök segítséget nyújtanak például a megtakarítási célok meghatározásában, befektetési döntésekben és nyugdíjtervezésben. A statisztikai módszerek és matematikai modellek alkalmazása révén a gazdasági adatok elemzése és előrejelzése is lehetségessé válik. A gazdasági mutatók, mint például a GDP-növekedés, munkanélküliségi ráta és az infláció alakulásának megértése és előrejelzése matematikai modellek és statisztikai eljárások segítségével történik.

A matematikai koncepciók és elvek inspiráló hatással lehetnek a művészeti alkotásban és dizájnban. Például a geometria és szimmetria matematikai alapokon nyugszik és gyakran megtalálhatóak a művészeti alkotásokban és építészeti tervezésben. Az absztrakt matematikai fogalmak, például a fraktálok vagy az algebrai struktúrák, új és izgalmas lehetőségeket kínálhatnak a művészeknek és tervezőknek az új formák, minták és stílusok létrehozására.

Összegzés

A matematikai gondolkodás fejlődését számos tényező befolyásolja, amelyek összetett módon hatnak az egyén kognitív képességeire és kompetenciáira. A kognitív képességek fejlődése során alakulnak ki az absztrakciós, logikai és érvelési készségek, amelyek nélkülözhetetlenek a matematikai gondolkodás alapjaihoz. Ezek a képességek teszik lehetővé az elvont fogalmak és összefüggések megértését. A formális és informális tanulási tapasztalatok szintén kritikus szerepet játszanak. Az óvodai és általános iskolai játékos tevékenységek,

valamint a középiskolai szisztematikus oktatás megalapozzák a matematikai ismereteket és problémamegoldási technikákat. A gyakorlati alkalmazások, mint például a valós életbeli problémák megoldása matematikai módszerekkel, segítenek a diákoknak abban, hogy megértsék a matematika gyakorlati jelentőségét. Az egyéni érdeklődés és motiváció szintén fontos tényezők. Azok a diákok, akik érdeklődnek a matematika iránt, hajlamosabbak önálló tanulásra és kihívások vállalására, ami mélyebb megértéshez és fejlettebb készségekhez vezet. A szociális és kulturális hatások, például a csoportos tevékenységek, matematikai szakkörök és versenyek, valamint a különböző kultúrák matematikai tradíciói, szintén hozzájárulnak a matematikai gondolkodás fejlődéséhez. A matematikai gondolkodás nemcsak az iskolai teljesítményt javítja, hanem a mindennapi problémamegoldást és a döntéshozatalt is elősegíti. Ez a képesség az élet különböző szakaszaiban folyamatosan fejlődik és jelentős hatással van az egyén mindennapi életére, munkájára és személyes fejlődésére. Az élet során szerzett tapasztalatok és az élethosszig tartó tanulás tovább gazdagítják és fejlesztik a matematikai kompetenciákat, hozzájárulva a sikeres és rugalmas gondolkodáshoz a változó környezetben.

Térbeli készségek és fejlődésük

Térbeli érzékelés és vizualizáció

„A térbeli készségek lehetővé teszik számunkra, hogy mentálisan manipuláljuk, rendszerezzük, érveljünk és értelmezzük a térbeli kapcsolatokat valós és elképzelt terekben” (Newcombe & Shipley, 2015; Uttal et al., 2013).

A definíció kiemeli, hogy a térbeli érzékelés alapvetően meghatározza, hogy hogyan lép kapcsolatba az egyén a környezetével és hogyan érti meg azt, valamint rávilágít a térbeli képességek mélyreható jelentőségére a kognitív folyamatokban. Először is, a térbeli elemek mentális manipulálása jelenti azt a képességet, hogy a térbeli elrendezéseket az egyén vizualizálja és átalakítja elméjében. Legyen szó akár egy szoba elrendezésének vagy egy mozgás pályájának elképzeléséről, ez a képesség teszi lehetővé az egyén számára a cselekvések hatékony tervezését és az absztrakt problémamegoldást. Másodsor, a rendszerezés képessége alapvető a környezet értelmezésében. Például a térképek és diagramok értelmezése vagy egy idegen környezetben történő navigálás során a térbeli szervezés teszi lehetővé, hogy a térbeli adatokat érthető módon strukturálja az egyén, megkönnyítve ezzel a megértést és a döntéshozatalt. Harmadszor, a térbeli gondolkodás magába foglalja a logika és a következtetés alkalmazását a térbeli kapcsolatokra. Ez a folyamat lehetővé teszi az egyén számára, hogy térbeli tulajdonságokra következtessen, előre jelezze a kimeneteket és következtetéseket vonjon le a térbeli bizonyítékok alapján. Ez nem csak a problémamegoldást segíti, hanem hozzájárul az analitikus gondolkodási képességek fejlesztéséhez is. Végül, a térbeli kapcsolatok megértésének fontossága is kiemelésre kerül a megfogalmazásban mind a valós, mind az elképzelt terekben. Míg a valós alkalmazások közé tartoznak olyan feladatok, mint a vezetés, építészet vagy navigáció, a képzeletbeli terekről való gondolkodáshoz tartozik akár egy hipotetikus forgatókönyv elképzelése, akár egy jövőbeli cselekvés tervezése vagy egy térbeli konfiguráció szimulálása. Ez a képesség a közvetlen érzékelési tapasztalatokon túlra is kiterjeszti az egyén kognitív képességeit.

Összességében, a térbeli képeségek nem korlátozódnak bizonyos területekre, hanem áthatják az emberi megismerés és viselkedés különböző aspektusait. A tudományotechnológiai területeken, a művészeti törekvésekben és a mindennapi tevékenységekben való jártasságot egyaránt alátámasztják. Ezeknek a képességeknek a fejlesztése elősegíti a kreativitást, a problémamegoldó képességet és a térbeli tudatosságot, növelve a különböző kihívásokhoz és környezetekhez való alkalmazkodási képességünket. A definíció összefoglalja

a térbeli készségek sokrétű természetét és az emberi megismerésre gyakorolt mélyreható hatását. Azáltal, hogy lehetővé teszik az egyén számára a térbeli információk navigálását, értelmezését és manipulálását, ezek a készségek gazdagítják a világról alkotott véleményét és képessé teszik arra, hogy hatékonyabban tudjon interakcióba lépni a környezetével

Egy másik megfogalmazás alapján: „*A térbeli képesség (vagyis pontosabban a térbeli vizualizáció), amely a verbális és kvantitatív képességekkel fonódik össze (Gustafsson & Undheim, 1996; Lubinski & Dawis, 1992), „a vizuális minták manipulálásának képességét jelenti, amelyet a sikeresen kezelhető vizuális ingeranyag nehézségi szintje és komplexitása jelez, tekintet nélkül a feladatmegoldás sebességére” (Carroll, 1993, 362. o.).*”

Ez a meghatározás kiemeli a térbeli vizualizáció árnyalt jellegét és a feladatmegoldás pusztán sebessége helyett a vizuális minták kezelésében való jártasságot hangsúlyozza. A térbeli vizualizáció magában foglalja a mintafelismerést, amely a vizuális ingerekben lévő térbeli minták és kapcsolatok azonosítását és értelmezését jelenti. Ez a képesség létfontosságú az olyan területeken, mint a művészet, a tervezés és a számítógépes grafika, ahol a vizuális minták felismerésének és manipulálásának képessége elengedhetetlen a kreativitáshoz és az innovációhoz.

Azonban fontos kiemelni, hogy több kutatás álláspontja szerint a térbeli képesség nem egyetlen képesség, hanem több tényező együttesét foglalja magába.

A térbeli érzékelés fejlődése

A térbeli érzékelés fejlődése már korai gyermekkorban elkezdődik, és ez az időszak kritikus szerepet játszik az egyén térbeli képességeinek kialakulásában. Ebben az időszakban a gyermekek alapvető térbeli képességeket sajátítanak el, amelyek később fontos szerepet játszanak a kompetenciák kialakulásában.

Shea, Lubinski és Benbow 2001-es hosszú vizsgálata a térbeli képességet fejlődését és azok hatását elemezte az intellektuálisan tehetséges fiataloknál. A kutatás négy fejlesztési szakaszt vizsgált: kedvenc és legkevésbé kedvelt középiskolai tantárgy, egyetemi szakirány, posztgraduális szakirány és foglalkozás 33 éves korban. A kutatás két hipotézist tesztelt: az egyéni különbségek, amelyeket serdülőkorban mértek térbeli, verbális és kvantitatív képességek alapján, megkülönböztetik az oktatási és szakmai csoportokat sok évvel a kezdeti mérés után, valamint a térbeli képességek értékelése kiegészítő érvényességet biztosít az oktatás és szakmai eredmények előrejelzésében az élettartam során, a verbális és kvantitatív képességek mellett. A kutatás résztvevői 12 és 14 év közötti fiúk (393 fő) és lányok (170 fő) voltak, akik a

korosztályuk felső 0,5%-át képviselték általános képességeik alapján az 1976-os és 1978-as években a közép-atlanti régióban. Az adatok gyűjtése 18, 23 és 33 éves korban történt követéses kérdőívekkel, az eredeti résztvevők közül 220 fő férfi és 101 fő nő vett részt mindhárom adatgyűjtésben. Az ötéves felmérésben a kedvenc és legkevésbé kedvelt középiskolai tantárgyakról gyűjtöttek információkat, a tízéves felmérésben az első egyetemi szakirány volt a fő téma, míg a húszéves kérdőívben a foglalkozással kapcsolatos volt. A fiúk 64%-a választotta a matematikát vagy természettudományi tárgyak a kedvencének, míg a lányoknál ugyanez az arány csak 37% volt. Azok, akik matematikát, számítástechnikát vagy elektromérnöki szakot választottak, hajlamosabbak voltak fejlettebb térbeli és matematikai képességekre. A humán és társadalomtudomány szakosok inkább verbális képességeikben voltak erősebbek. A húszéves felmérés alapján a térbeli képességek szignifikáns hatással voltak a résztvevők karrierjére. A kutatás jelentős nemi különbségeket talált, amik a térbeli képességek és alkalmazott stratégiák terén is megmutatkoztak. A kutatás alapján a térbeli képességek fejlesztése korai serdülőkorban kritikus fontosságú lehet a későbbi akadémiai és szakmai siker szempontjából.

Zhang és Lin 2015-ös kutatása szerint a négy éves kínai gyerekek térbeli érzékelése előre jelezte a különböző matematikai eredményeket egy évvel később. A kutatás azt mutatja, hogy a korai térbeli képességek jelentős hatással vannak a későbbi matematikai teljesítményre. A kutatás során 106 kínai gyermek képességeit vizsgálták Hongkongban. A gyermekek szüleiről az tudható, hogy az édesapák 10,5%-a, míg az édesanyák 5,3%-a rendelkezett felsőoktatási képesítéssel. A gyerekek képességeit összesen ötször tesztelték az óvodai első és harmadik év között. A kutatás szerint jelentős eltérések vannak a gyermekek kezdeti térbeli érzékelésében és annak növekedési ütemében. Azonban a kezdeti térbeli érzékelés nem volt összefüggésben a későbbi növekedési ütemmel, ami azt jelzi, hogy a kezdeti képességek szintje nem befolyásolja a fejlődési sebességet. A térbeli képességek fejlődési pályája fontos információkat hordozhat az egyének későbbi akadémiai teljesítményéről. Ez alátámasztja azt az elképzelést, hogy a növekedési ütem hasznos lehet a szűrés és oktatás szempontjából, mivel a hagyományos statikus kompetenciamérésekhez képest további információkat nyújt a gyermekek fejlődésének nyomon követéséhez. A kutatás kimutatta, hogy a nyári szünidők alatt kisebb volt a térbeli érzékelés fejlődése, ami általános tanulási veszteségre utal a nyári hónapokban. Ez kiemeli annak a fontosságát, hogy a nyári szünidő alatt is fent kell tartani a gyermekek tanulási aktivitását. A kutatás alapján a térbeli képességek fejleszthetők, és az egyéni különbségek az óvodai évek alatt a térbeli nyelvhasználatban és a térbeli tevékenységekben való részvételben jelennek. Az eredmények szerint a tanároknak és szakembereknek érdemes figyelemmel

követniük a gyermekek térbeli képességeinek fejlődési ütemét, és a megfelelő tanulási lehetőségeket biztosítani azok számára, akiknél a növekedési ütem lassabb.

A térbeli érzékelés alapvető szerepet játszik a tervezési folyamatokban. Több kutatás kimutatta, hogy a tervezési képesség fejlesztése javítja a térbeli képességeket, beleértve a térbeli vizualizációt, a térbeli kapcsolatokat és a vizuális-térbeli észlelés sebességét. Ezen eredmények alapján megállapítható, hogy a térbeli képességek fejleszthetők célzott tréningekkel és különféle megoldási stratégiák alkalmazásával. Egy 2008-as kutatás szerint a számítógépes játékokkal való tréning is javítja a térbeli képességeket, ami arra utal, hogy a különféle játékos és interaktív módszerek is hatékonyak lehetnek a térbeli érzékelés fejlesztésében.

Egy 2016-os kutatás eredményei szerint a tervezési képesség képzésében részt vevő csoportok (design group) tagjai jobb teljesítményt mutattak a térbeli vizualizáció és térbeli kapcsolatok tesztjeiben, mint azok, akik nem vettek részt ilyen képzésben (non-design group). Ugyanakkor a vizuális-térbeli észlelési sebességben nem volt jelentős különbség a két csoport között. A 129 tajvani diák részvételével készült kutatásban 77 fő volt a design group tagja, míg 52 fő a non-design group tagja volt, életkoruk 18 és 24 év között volt a kutatás ideje alatt. A térbeli vizualizáció vizsgálatára a VMRT-t (Visuomotor Reaction Time), a térbeli kapcsolatok értékelésére a CRT-t (Cognitive Reflection Test), míg a vizuális-térbeli érzékelés sebességének érzékelésére a HPT-t (High-Performance Task) használták. A kutatás szerint, azok, akik magasan fejlett térbeli képességekkel rendelkeznek, általában holista stratégiákat alkalmaznak, amelyek az egész tárgy vagy jelenet egyben történő feldolgozását jelentik. Azok, akik kevésbé fejlett térbeli képességekkel rendelkeznek, inkább analitikus módszereket alkalmaznak, amelyek részletekben, lépésről lépésre dolgozzák fel a tárgyakat és jeleneteket. A kutatás kimutatta, hogy a tervezési képesség képzése jelentős mértékben javítja a térbeli vizualizációt és a térbeli kapcsolatokat, de nem befolyásolja jelentősen a vizuális-térbeli észlelési sebességet.

Összefoglalva, a térbeli érzékelés fejlődése összetett folyamat, amely kritikus szerepet játszik a gyermekek későbbi kompetenciáinak kialakulásában. A korai gyermekkorban szerzett tapasztalatok és a fejlődési ütem kulcsfontosságúak a későbbi akadémiai siker szempontjából, ezért elengedhetetlen a folyamatos nyomon követés és a megfelelő tanulási környezet biztosítása. A tervezési képesség képzése, a számítógépes játékok, a különböző tréningek egyaránt hatékonyak lehetnek a térbeli képességek fejlesztésében, ami hosszú távon jelentős előnyökkel járhat.

Térbeli problémamegoldás és térbeli navigáció

A térbeli problémamegoldás és térbeli navigáció olyan kognitív folyamatok, amelyek lehetővé teszik az egyén számára, hogy megértse és kezelje a térbeli környezetét.

A térbeli problémamegoldás képessége teszi lehetővé az egyén számára, hogy azonosítsa és megoldja a térbeli kapcsolatokkal és elrendezésekkel kapcsolatos kihívásokat. Ez magában foglalhatja például a térképek értelmezését, a tárgyak elrendezését egy térben vagy az útvonaltervezést egy komplex környezetben. A térbeli problémamegoldás fontos szerepet játszik a mindennapi életben.

A térbeli navigáció a térben történő tájékozódás folyamata. Ez magában foglalja az irányok és távolságok megítélését, valamint az útvonal tervezését és követését. A térbeli navigáció segítségével képes az egyén elnavigálni egy ismerős vagy ismeretlen környezetben és hatékonyan eljutni a célhoz.

A térbeli problémamegoldás és térbeli navigáció szorosan összefügg a térbeli érzékeléssel, mivel mindhárom folyamat az egyén azon képességét jelenti, hogy képes megérteni és értelmezni a térbeli információkat, és ezáltal képes hatékonyan megoldani az esetlegesen felmerülő térbeli kihívásokat. A térbeli problémamegoldás és a térbeli navigáció kulcsfontosságúak számos területen, beleértve a mindennapi életet, a tudományt, a műszaki tervezést és az építészetet. Ezek a képességek teszik lehetővé az egyén számára, hogy hatékonyan tudjon együttműködni környezetével és sikeresen navigáljon a világban.

A térbeli navigáció fontossága a gazdaságban számos területen megmutatkozik és jelentős szerepe van az üzleti sikerben. A térbeli navigáció segíti a logisztikai és szállítási vállalkozásokat abban, hogy hatékonyan tervezzék és irányítsák az áruk és szolgáltatások mozgását. A térképek, útvonaltervező szoftverek és navigációs eszközök segítségével a szállítók optimalizálhatják a fuvarozási útvonalakat, minimalizálhatják a szállítási időt és költségeket, és megkönnyíthetik a termékek pontos kiszállítását a végfelhasználókhöz. A kereskedelmi vállalkozások számára segítséget nyújt abban, hogy stratégikusan helyezték el üzleteiket és telephelyeiket. Az üzleti döntések meghozatalában a földrajzi adatok és térképek segítenek az üzleti területek kiválasztásában, az üzleti célközönség elérésében és a versenyképesség növelésében. A turizmus-vendéglátás területén a navigációs alkalmazások és térképek nyújtanak segítséget az utazóknak abban, hogy új helyeket fedezzenek fel, megtalálják a szálláslehetőségeket, éttermeket és látnivalókat, valamint biztonságosan eljussanak céljukhoz. Az ingatlaniparban az ingatlanok helyszínének és értékének meghatározásában segít a térbeli navigáció, hogy az ingatlanfejlesztők és ingatlankezelők hatékonyan tervezzenek, építsenek és kezeljenek ingatlanokat. A térbeli navigáció fontos szerepet játszik a telekommunikációs

vállalatok életében is az infrastruktúra tervezésében és fejlesztésében. A földrajzi adatok alapján keresik az optimális elhelyezést az optikai kábelek és mobiltelefon-tornyok számára, valamint a szolgáltatások kiterjesztésének lehetőségeit is.

Összegzés

A térbeli érzékelés és vizualizáció olyan alapvető kognitív képességek, amelyek lehetővé teszik az egyén számára, hogy megértse és kezelje a környezetét. Ezek a képességek az emberi megismerés és viselkedés számos területén fontos szerepet játszanak. A térbeli érzékelés lehetővé teszi az egyén számára, hogy érzékelje és megértse a térbeli kapcsolatokat valós és elképzelt terekben. A térbeli vizualizáció lehetővé teszi, hogy az egyén mentálisan manipulálja és ábrázolja a térbeli információkat. A térbeli érzékelés és vizualizáció fontosságát a gazdaságban kiemeli a logisztika területe az áruk és szolgáltatások mozgatása során. A kereskedelmi vállalkozások számára az optimális elhelyezkedés, a turizmus-vendéglátás számára a navigálás szempontjából fontos. Összességében tehát elmondható, hogy a térbeli érzékelés és vizualizáció fontossága a mindennapi élet és a gazdaság számos területén megmutatkozik és kulcsfontosságú szerepet játszik a mindennapi boldogulásban, az üzleti sikerben és a versenyképességben.

A matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolat

Elméleti háttér és korábbi kutatások áttekintése

Az elméleti háttérrel tekintve a matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolatot számos kutatásban vizsgálták és több elmélet is alátámasztja. A kutatások kimutatták, hogy az emberek, akik jobban teljesítenek térbeli feladatokban, általában jobban teljesítenek matematikai teszteken is. Ez a kapcsolat nemcsak serdülők és felnőttek esetében, hanem már fiatal gyerekeknél is felfedezhető. A korrelációs tanulmányok megerősítik, hogy a térbeli képességek kapcsolódnak a matematikai képességekhez a fejlődés különböző szakaszaiban, beleértve az általános iskola kezdeti éveit is.

Casey, Pezaris & Nuttall, 1992

Az 1992-es Casey, Pezaris és Nuttall által végzett kutatás arra irányult, hogy megértsék a két készség közötti kapcsolatot, különös tekintettel az egyes nemek és kézírányultság csoportok közötti különbségekre. A kutatásban 13 és 15 év közötti nyolcadik osztályos bostoni lányokat (132 fő) és fiúkat (108 fő) vizsgáltak. A rendszeres iskolai tesztek mellett a vizsgált diákok az Edinburgh Handedness Inventory (Edinburgh kézírányultság teszt), a Family Handedness Scale (családi kézírányultság skála) és a Mentális Rotációs Teszt vizsgálatában vettek részt. Az eredmények alapján kiderült, hogy az egyes nemek és kézírányultság csoportok között eltérő volt a térbeli képességek szerepe a matematikai teljesítmény előrejelzésében.

A fiúk esetében a térbeli képesség jelentős előre jelző volt a matematikai teljesítmény szempontjából, függetlenül a kézírányultság csoporttól. Ez azt sugallja, hogy a fiúk a térbeli képességeiket használják a matematikai problémák megoldásához.

Ugyanakkor a lányok esetében bonyolultabb volt a helyzet. Az anomális dominanciával rendelkező lányoknál (balkezes lányok vagy jobbkezes lányok, akiknek nem jobbkezes a rokonságuk) a térbeli képesség szintén fontos előre jelző volt a matematikai teljesítmény szempontjából, és hasonlóan hatékonyan alkalmazták ezt a képességüket a matematikai problémák megoldásában, mint a fiúk. Ezzel szemben a szabványos dominanciával rendelkező lányoknál (jobbkezesek, akiknek minden rokonuk jobbkezes) a térbeli képesség nem játszott szerepet a matematikai teljesítmény előrejelzésében.

Ezek az eredmények azt sugallják, hogy a térbeli képességek és a matematikai teljesítmény közötti kapcsolatot nemcsak az egyes nemek, hanem a kézírányultság csoportok tekintetében is figyelembe kell venni. A kutatás azt mutatta, hogy a lányoknál az anomális dominanciával rendelkező csoportokhoz tartozók hasonlóan hasznosítják térbeli képességeiket a matematikai

feladatok megoldásában, mint a fiúk. Ezzel szemben a szabványos dominanciával rendelkező lányoknál a térbeli képességeknek kevés hatása volt a matematikai teljesítményre.

Ezek az eredmények hangsúlyozzák a térbeli képességek szerepét a matematikai teljesítmény előrejelzésében, és rámutatnak arra, hogy ez a kapcsolat különböző kontextusokban és populációkban eltérő lehet. A kutatás azt is alátámasztja, hogy a nemek és kézírányultság csoportok közötti különbségeket figyelembe kell venni az oktatásban és a fejlesztésben, hogy hatékonyabban tudják az oktatók támogatni a diákok matematikai teljesítményét.

Cheng & Mix, 2014

A Cheng és Mix által 2014-ben végzett kutatásban 6 és 8 év közötti michigani diákokat vizsgáltak, véletlenszerűen két csoportra osztva: térbeli tréning csoport (31 fő) és kontroll csoport (27 fő). A gyerekek először két térbeli és egy matematikai tesztet töltek ki, majd egy héten belül egy 40 perces tréningen vettek részt, ezután közvetlenül pedig három utótesztet végeztek el. A térbeli tréning csoport esetében a foglalkozás mentális rotációs gyakorlatokból állt, míg a kontroll csoport keresztrejtvényeket kapott feladatként. Bár a gondolat, hogy a térbeli tréning segíthet a matematikai tanulásban nem új, kevés tanulmány vizsgálta ténylegesen ennek az eredményeit.

A kutatás eredményei alátámasztják, hogy a térbeli tréning közvetlenül javíthatja a matematikai teljesítményt bizonyos területeken, már egy 40 perces foglalkozás után is. A tanulmány során multivariáns kovarianciaelemzést végeztek annak érdekében, hogy meghatározzák, a térbeli tréninget kapott csoport jobban teljesített-e. Az eredmény jelentős különbséget mutatott a térbeli tréning csoport javára, mind a mentális rotációs teszten, mind a matematikai teszt esetében. Azonban a térbeli kapcsolatok alteszten nem volt jelentős különbség a két csoport tagjainak eredménye között, ami azt sugallja, hogy a mentális rotációs tréning nem vezetett általános javuláshoz a térbeli képességekben.

Az elő- és utótesztek eredményeinek elemzésével kissé eltérő mintázatokat tártak fel. A térbeli tréninget kapott gyerekeknél jelentős javulás volt tapasztalható a hiányzó elemek feladatokban és a többjegyű számításokban, de a számfaktum feladatokban nem. Ezzel szemben a kontroll csoportba tartozó gyerekek egyik matematikai alapkészségben sem mutattak jelentős javulást. Ez az eredmény további bizonyítékot nyújt arra, hogy a térbeli kogníció és a matematikai gondolkodás összekapcsolódik, és a térbeli tréning közvetlenül javíthatja a matematikai teljesítményt, valamint egyedülálló módon kimutatja a két készségterület közötti ok-okozati kapcsolatot.

Tsui, Venator, Xiaoying, 2014

A térbeli képességeket mérő Mentális Rotációs Teszt (MRT) régóta dokumentált nemi különbségeket mutat, általában a férfiak javára. A kutatások során azt találták, hogy a férfiak átlagosan jobb eredményeket érnek el a mentális rotációs teszteken, mint a nők. Ezek a különbségek univerzálisak, de különösen markánsak a gazdaságilag fejlett, a nemek közötti egyenlőséget támogató társadalmakban.

Ebben a kutatásban a Wuhan Műszaki Egyetem (WUT) másodéves fizika szakos hallgatóit vizsgálták, 145 férfi és 57 női hallgató részvételével. Az eredmények szerint a férfiak átlagosan 15,9, míg a nők 12,1 pontot értek el a Mentális Rotációs Teszten, ami szignifikáns nemi különbséget mutatott. Ezek az eredmények összhangban vannak más kínai és nemzetközi kutatásokkal. Bár a térbeli képességek és a matematikai teljesítmény közötti kapcsolat jól dokumentált, a WUT fizika szakos hallgatói körében nem találtak nemi különbségeket a matematikai teljesítményben. Ez különös, tekintettel arra, hogy az MRT nemi különbségei jelentősök voltak. A nemi különbségek hiányát magyarázhatja a kínai oktatási rendszer sajátosságai vagy a résztvevők homogén csoportja.

A térbeli képességek, különösen a mentális rotáció, szoros kapcsolatban állnak a magasabb szintű matematikai képességekkel. Bár a nemi különbségek az MRT-n univerzálisak, a matematikai teljesítményben ezek nem mindig tükröződnek. A kínai egyetemisták körében végzett vizsgálatok azt sugallják, hogy az oktatási rendszer és a társadalmi-kulturális tényezők jelentős szerepet játszhatnak a nemi különbségek alakulásában.

Zhang & Lin, 2017

Zhang és Lin tanulmányukban azt vizsgálták, hogy a térbeli képességek fejlődési üteme mennyiben befolyásolja a korai aritmetikai kompetenciát. A térbeli képességek és az aritmetikai készségek közötti kapcsolatot vizsgáló néhány korábbi tanulmány főként két térbeli gondolkodási képességre, a mentális rotációra és a térbeli vizualizációra fókuszált, amelyek hosszú távú előre jelzői az aritmetikai készségeknek. Zhang és Lin jelenlegi tanulmányukban egy egyszerű térérzékelési feladatot használtak, amely alapvető térbeli képességet mér, anélkül, hogy térbeli gondolkodást vagy átalakítást igényelne. Eredményeik alátámasztják korábbi kutatásaik eredményeit, amelyek a térbeli érzékelés alapvető fontosságát mutatják a korai aritmetikai készségek elsajátításában.

A legszembetűnőbb eredmény az volt, hogy a térbeli érzékelés fejlődési üteme az első és harmadik óvodai év között jelentős előre jelzője volt az óvoda végén mért aritmetikai kompetenciának. Ez az eredmény hangsúlyozza a térbeli képességek fejlődési ütemének fontosságát az aritmetikai kompetencia kialakulásában az óvodás és általános iskolás évek

során. Ezen túlmenően, eredményeik azt mutatják, hogy a térbeli érzékelés fejlődési ütemének hatása az aritmetikai kompetenciára független volt a fonológiai tudatosság általános szintjétől és fejlődési ütemétől, valamint számos térbeli gondolkodási képességtől, beleértve az analógiai gondolkodást, a térbeli vizualizációt és a mentális rotációt. Így a térbeli érzékelés fejlődési üteme magyarázta az aritmetikai kompetenciában mutatkozó varianciát, amelyet a korábbi kognitív prediktorok nem tudtak megmagyarázni, ezáltal bizonyítva a növekedési ütem előre jelző értékét a korai aritmetikában.

A gyakorlatban az eredmények arra utalnak, hogy az óvodások térbeli érzékelésének fejlesztése hozzájárulhat a matematikai kompetenciáik javulásához. Az óvodás évek során a térbeli képességek fejlődésében mutatkozó egyéni különbségek az eltérő térbeli nyelvhasználatból és a térbeli tevékenységekben való részvételből eredhetnek. Mivel eredményeik azt mutatják, hogy a fejlődési ütem erősen előre jelzi a későbbi kompetenciát, értékes lehet a pedagógusok és szakemberek számára, ha figyelemmel kísérik az óvodások térbeli képességeinek fejlődési ütemét.

Kinnari, Richard, Terri, Jihyun, Elyssa A., David H., Colleen M., Sheryl A., 2022

Számos tanulmány talált pozitív összefüggést a térbeli és matematikai gondolkodás között, ami közös kognitív vagy neurális folyamatok alapján magyarázható. Az agyi képalkotó vizsgálatok tovább erősítik ezt az összefüggést, mivel hasonló agyi területek aktiválódnak a térbeli és numerikus információ feldolgozásakor. A kognitív folyamatok közül, amelyek szoros pozitív kapcsolatban állnak a matematikai teljesítménnyel, kiemelhetők az olyan végrehajtó funkciók, mint a munkamemória és a fluid intelligencia. A munkamemória egy mentális munkaterület, amely komplex kognitív feladatok végrehajtásához szükséges információk aktív fenntartásával, szabályozásával és irányításával foglalkozik. A fluid intelligencia pedig az új problémák rugalmas és szándékos megoldásának képességét jelenti korábbi információk felhasználása nélkül, az új problémák elemzésének, a minták és kapcsolatok azonosításának és a logikai következtetések alkalmazásának képessége.

Összességében, a meglévő kutatások arra utalnak, hogy a térbeli és matematikai készségek közvetlen kapcsolata nem feltétlenül áll fenn. Az intelligencia elméletek szerint más általános kognitív tényezők, mint például a munkamemória, a fluid intelligencia és az általános intelligencia alapozhatják meg ezen készségek kapcsolatát.

Ez a metaanalízis két kérdéskört vizsgált, amelyek mindegyike eltérő analitikai eszközöket igényelt. Nyilvánosan elérhető online adatbázisokban kerestek 1997 és 2018 közötti kutatások

eredményeit, hogy ezeket dolgozzák fel, összesen pedig 769 kutatás eredményét vizsgálták meg.

Az első metaanalízis során korrelált és hierarchikus hatásokkal dolgoztak meta-regressziós modellek segítségével, hogy megválaszolják a két kutatási kérdést: 1. Mekkora a térbeli készségek és a matematikai készségek közötti kapcsolat mértéke? és 2. Milyen hatása van a nemnek és az iskolai szintnek a térbeli és matematikai készségek közötti összefüggésre?

A második metaanalízis során meta-analitikus strukturális egyenletmodellezési megközelítést alkalmaztak, hogy megvizsgálják, hogyan befolyásolják a térbeli készségek és matematikai készségek közötti kapcsolatot az általános kognitív készségek, mint például a munkamemória, a fluid intelligencia és a verbális készségek.

Az eredmények egy mérsékelt pozitív összefüggést mutattak a térbeli készségek és a matematikai teljesítmény között. Azonban sem a nem, sem az iskolai szint nem moderálta jelentősen a kapcsolatot. A legerősebb közvetlen út a térbeli képességektől a fluid intelligenciáig vezetett. A térbeli készségek és a matematikai készségek közötti kapcsolat továbbra is jelentős maradt, még a fluid intelligencia vagy a verbális készségeket tartalmazó közvetett utak figyelembevételével is. A fluid intelligencia jobban közvetítette a térbeli és matematikai készségek közötti hatást, mint a verbális készségek, és a térbeli készségek és matematikai készségek közötti kapcsolat nagyobb volt, mint ezek a közvetett kapcsolatok.

A kutatás megerősíti, hogy a térbeli készségek és a matematikai készségek szignifikánsan összefüggenek. A tanulmány megerősíti a korábbi kutatások eredményeit, amelyek szerint a térbeli és matematikai készségek közvetlen pozitív összefüggést mutatnak. A kapcsolat mértéke jelentős, és összhangban van a meglévő metaanalízisek eredményeivel, amelyek különböző kognitív készségek és matematikai teljesítmény közötti összefüggést vizsgáltak.

A két készségterület közötti összefüggések és kölcsönhatások

Ahogy az a kifejtett kutatásokból látszik, a matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolatot számos kutatás vizsgálta.

A korrelációs tanulmányok következetesen kimutatták, hogy a térbeli képességek szoros összefüggésben állnak a matematikai készségekkel. Ez a kapcsolat már fiatal korban, például óvodai években is megfigyelhető. Az emberek, akik jobban teljesítenek a térbeli feladatokban, általában jobban teljesítenek matematikai teszteken is. Ez arra utal, hogy a két készségterület között erős kapcsolat áll fenn, amely a kognitív fejlődés során különböző szakaszokban is jelentős marad.

Casey, Pezaris és Nuttall 1992-es kutatása különböző nemi és kézírányultság csoportok közötti különbségeket is figyelembe véve vizsgálta a térbeli és matematikai készségek kapcsolatát. Eredményeik szerint a fiúk esetében a térbeli képességek jelentős előre jelzői a matematikai teljesítménynek, függetlenül a kézírányultságtól. Ez arra utal, hogy a fiúk a térbeli képességeiket használják a matematikai problémák megoldásához. A lányok esetében azonban az anomális dominanciával rendelkező csoportnál a térbeli képességek hasonlóan fontosok voltak a matematikai teljesítmény előrejelzésében, míg a szabványos dominanciával rendelkező lányoknál ezt a kapcsolat nem volt kimutatható. Ez azt sugallja, hogy a térbeli képességek és a matematikai teljesítmény közötti kapcsolat nemcsak a nemek, hanem a kézírányultság tekintetében is eltérő lehet.

Cheng és Mix 2014-es kutatása azt vizsgálta, hogy a térbeli tréning közvetlenül javíthatja-e a matematikai teljesítményt. Kísérletük során 6-8 éves gyerekeket véletlenszerűen két csoportra osztottak: egy térbeli tréning csoport és egy kontroll csoport. A térbeli tréning csoport jelentős javulást mutatott mind a mentális rotációs teszteken, mind a matematikai teszteken. Ez a tanulmány fontos bizonyítékot szolgáltat arra, hogy a térbeli tréning közvetlenül javíthatja a matematikai teljesítményt, és megerősíti a két készségterület közötti ok-okozati kapcsolatot.

Tsui, Venator és Xiaoying 2014-es kutatása azt vizsgálta a WUT másodéves fizika szakos hallgatói között, hogy a mentális rotációs teszten megjelenő nemi különbségek hogyan jelennek meg a matematikai teljesítményben. Bár a férfiak univerzálisan jobb eredményeket érnek el az MRT-n, a WUT hallgatói között nem találtak nemi különbségeket a matematikai teljesítményben. A vizsgálat azt mutatja, hogy az oktatási rendszer és a társadalmi-kulturális tényezők jelentős szerepet játszhatnak a nemi különbségek alakulásában a matematikai és térbeli képességek kapcsolatában.

Zhang és Lin 2017-es kutatása a térbeli érzékelés fejlődési ütemének fontosságát hangsúlyozta a matematikai kompetenciák kialakulásában. Eredményeik szerint a térbeli érzékelés fejlődési üteme jelentős előre jelzője volt a matematikai képességeknek az óvodai évek során. A térbeli érzékelés fejlődési ütemének hatása független volt más kognitív tényezőktől, mint a fonológiai tudatosság vagy a mentális rotáció. Ez arra utal, hogy a térbeli érzékelés alapvető szerepet játszik a matematikai készségek kialakulásában, és a fejlődési ütem fontos előre jelzője a későbbi matematikai teljesítménynek.

Kinnari és társai metaanalízise megerősítette, hogy a térbeli és matematikai készségek közötti kapcsolat mérsékelt pozitív összefüggést mutat. Az elemzés szerint a munkamemória és a fluid intelligencia jobban közvetíti a térbeli és matematikai készségek közötti hatást, mint

a verbális készségek. Ez azt sugallja, hogy a térbeli képességek fejlesztése közvetett módon, a fluid intelligencia erősítésén keresztül is hozzájárulhat a matematikai teljesítmény javulásához.

Az oktatási gyakorlat számára ezek az eredmények több fontos tanulságot is hordoznak. Az óvodai és iskolai környezetben fontos a térbeli képességek fejlesztése, például puzzle játékokkal és térbeli nyelvhasználattal. Az oktatás során figyelembe kell venni a nemek és kézírányultság csoportok közötti különbségeket, és ennek megfelelően kell alakítani a fejlesztési programokat. A gyerekek fejlődési ütemének folyamatos figyelemmel kísérése és támogatása segíthet az egyéni szükségletekhez igazított oktatási stratégiák kidolgozásában.

Összességében, a kutatások eredményei világosan mutatják, hogy a matematikai és térbeli készségek között szoros kapcsolat áll fenn, és ezek a készségek kölcsönhatásban állnak egymással. A térbeli képességek fejlesztése közvetlenül és közvetetten is hozzájárulhat a matematikai teljesítmény javulásához. Az oktatási stratégiák kidolgozása során fontos figyelembe venni ezeket az összefüggéseket, és támogatni a gyerekek térbeli és matematikai képességeinek párhuzamos fejlesztését.

A fejlesztésükben és tanításukban rejlő lehetőségek

A matematika és térbeli képességek közötti kapcsolat szoros és fontos. A térbeli képességek azok a kognitív képességek, amelyek lehetővé teszik az egyén számára, hogy értelmezze és megértse a térbeli viszonyokat, alakzatokat és térbeli tájékozódást. Ezek az ismeretek és képességek szorosan kapcsolódnak a matematikai gondolkodáshoz és problémamegoldáshoz. A matematika tanításában és a térbeli képességek fejlesztésében több lehetőség is rejlik.

Az olyan feladatok és játékok alkalmazása, amelyek térbeli manipulációt igényelnek, mint például a puzzle játékok, építőjátékok, geometriai alakzatok rendezése, segíthetik a diákokat, hogy megerősítsék térbeli észlelésüket és megértésüket. Ez már az óvodai években elkezdhető, ami a későbbiekben hozzájárul a matematikai képesség fejlődéséhez is.

A vizuális segédanyagok és modellek alkalmazása támogatja a matematikai fogalmak és problémák megértését. Vizuális segédanyag lehet egy 3D modell a probléma szemléltetésére, vagy a térbeli transzformációk vizuális reprezentációi.

A térbeli gondolkodást igénylő feladatok beépítése a matematika tananyagába, például térbeli geometriai alakzatok tulajdonságainak vizsgálata, térbeli rendezés, térbeli transzformációk, segítik a térbeli készségek fejlesztését.

A valós élethelyzeteket modellező térbeli problémamegoldó feladatok, mint a térképolvasás vagy a térbeli tájékozódási feladatok szintén segíti a térbeli készségek fejlődését a diákokban.

A kreatív feladatok, például az építészeti tervezés vagy térbeli modellek készítése, arra ösztönzi a diákokat, hogy kreatív módon alkalmazzák térbeli képességeiket a matematikai problémák megoldására.

Az integrált megközelítés, amely a matematika tanítását és a térbeli képességek fejlesztését kombinálja, segíthet abban, hogy a diákok jobban megértsék és alkalmazzák a matematikai fogalmakat a valós élet különböző területein.

Összegzés

A matematikai és térbeli képességek közötti kapcsolatot számos kutatás tárgyalja. A korrelációs tanulmányok egyértelműen kimutatják, hogy a térbeli képességek és a matematikai teljesítmény szorosan összefügg, már fiatal kortól kezdve. A kutatások különböző csoportokat, például nemeket és kézírányultságokat is figyelembe vettek annak érdekében, hogy árnyalják a kapcsolatot.

Az oktatási gyakorlat szempontjából fontos megjegyezni, hogy a térbeli képességek fejlesztése közvetlenül és közvetve is javíthatja a matematikai teljesítményt. Az oktatás során fontos figyelembe venni a nemek és kézírányultság csoportok közötti különbségeket, valamint figyelemmel kell kísérni és támogatni a gyerekek fejlődési ütemét.

A két készségterület közötti kapcsolat fontos szerepet játszik a gazdasági világban is, különösen azokon a területeken, ahol az innováció és a technológia fejlődése meghatározó.

A mérnöki tervezés, a termékfejlesztés és az innováció során rendkívül fontosok a térbeli képességek. A mérnököknek és tervezőknek gyakran kell ábrákat, rajzokat értelmezniük, térbeli problémákat megoldaniuk és 3D-s objektumokat modellezniük. Ugyanez igaz a szoftverfejlesztés, a grafikai tervezés és a virtuális valóság területein is. A 3D-s modellezés, animációk készítése és virtuális környezetek tervezése során elengedhetetlenek a térbeli gondolkodási képességek.

A matematikai képességek kulcsfontosságúak a pénzügyi elemzésben, az adatelemzésben és a gazdasági modellezésben. Azok a szakemberek, akik képesek matematikai modelleket alkalmazni az üzleti folyamatok megértésére és optimalizálására, nagyobb valószínűséggel hoznak hatékonyabb döntéseket. A matematikai modellek a gazdasági kockázatok elemzésében és az optimális üzleti stratégiák kialakításában is fontos szerepet játszanak. A térbeli

gondolkodás segíthet abban, hogy az üzleti vezetők jobban megértsék a térbeli kapcsolatokat, például a logisztikai folyamatok optimalizálásában.

Ezek az ismeretek és képességek egyaránt hozzájárulnak a gazdasági növekedéshez és a versenyképességhez, ezért fontos azok fejlesztése és támogatása az oktatási rendszerben és a vállalati környezetben is.

Statisztikai elemzés korábbi kutatások alapján

A használt szoftver bemutatása

A statisztikai elemzés elvégzésére a Minitab szoftvert választottam. A Minitab egy népszerű statisztikai szoftver, amelyet gyakran használnak a statisztikai elemzésekhez, adatvizualizációhoz és minőségellenőrzéshez. Leggyakrabban a hatékony adatelemzésre és a statisztikai módszerek alkalmazására használják különböző ipari és kutatási területeken.

A szoftver széleskörű statisztikai elemzési eszközöket kínál, beleértve az alapvető statisztikákat, például átlagokat, szórásokat és korrelációkat, valamint speciálisabb módszereket, mind például a regresszióelemzés, ANOVA vagy t-próbák. Fontos szerepet kapott az adatvizualizáció is a szoftverben, grafikonokat, ábrákat és diagramokat is lehet készíteni benne.

A szoftver nagy előnye, hogy egyszerűen használható és sokféle statisztikai elemzési feladathoz nyújt megoldást.

Korrelációs elemzés a matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolat vizsgálatára

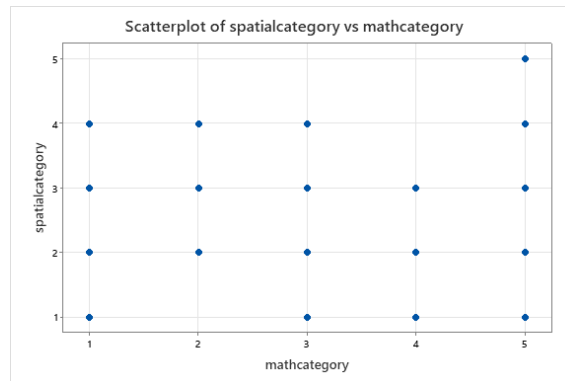
A korrelációs elemzéshez a Kinnari és társai 2021-es metaanalízisének adatait használtam fel. A 45 cikkből összegyűjtött adathalmazt online elérhetővé tették (<https://osf.io/h3w7j>), amiből a Dataset_matrix fájlból nyertem ki az adatokat, exportáltam .RData fájlból .xlsx fájlba és ezt a .xlsx fájlt importáltam a Minitab szoftverbe. Az első kutatás adatait használtam az elemzésemhez.

Előfeltételek vizsgálata

A korrelációs elemzés elvégzése előtt néhány fontos előfeltételt meg kell vizsgálni:

- az adatoknak kvantitatívnak kell lenniük,
- az adatok között lineáris kapcsolatot feltételez a korrelációs elemzés,
- az adatoknak közel normális eloszlásúnak kell lenniük, különösen a Pearson-féle korrelációs együtthatónál,
- a varianciák homogenitása szükséges,
- nincsenek extrém kiugró értékek, amik torzítanák a korrelációs eredményeket,
- megfelelő mintanagyság fontos, kis minta esetén a korrelációs együttható kevésbé megbízható,
- az adatoknak független megfigyelésekből kell származniuk.

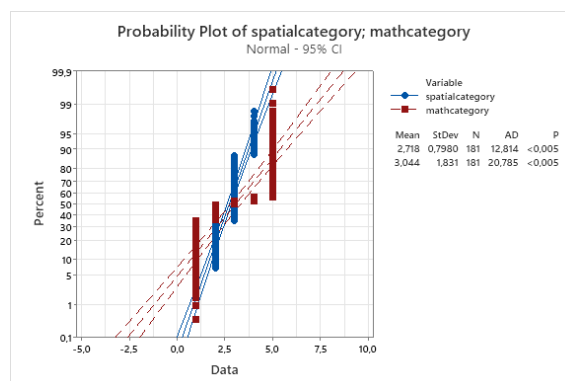
Lineáris kapcsolat vizsgálata: A Scatter Plot diagram típussal tudjuk megvizsgálni a változók közötti kapcsolatot.



1. ábra
Szórásdiagram

A diagramról az olvasható le, hogy a két kategória közötti kapcsolat nem lineáris jellegű. Leolvasható az is, hogy nincsenek extrém kiugró értékek.

Normális eloszlás vizsgálata:



2. ábra
Valószínűségi diagram

A Probability Plot eredményei segítenek megérteni, hogy az adott változók adatai mennyire követik a normális eloszlást. Az AD teszt statisztikai értékét és P-értéket használ az eloszlás normálisságának értékelésére.

Az StDev az adatok szóródását méri az átlag körül. Minél nagyobb ennek az értéke, annál nagyobb a szórás. Az Anderson-Darling teszt az egyik módszer a normális eloszlás tesztelésére. Az AD statisztikai érték mértéke a normálistól való eltérés mértékét jelzi. Minél nagyobb az AD érték, annál inkább eltér az eloszlás a normálistól. A p-érték a statisztikai teszt eredménye, amely megmutatja, hogy mennyire valószínű, hogy az adatok normális eloszlásúak. Ha a p-

érték nagyon kicsi (általában 0,05-nél kisebb), akkor elutasítjuk a nullhipotézist, amely szerint az adatok normális eloszlásúak.

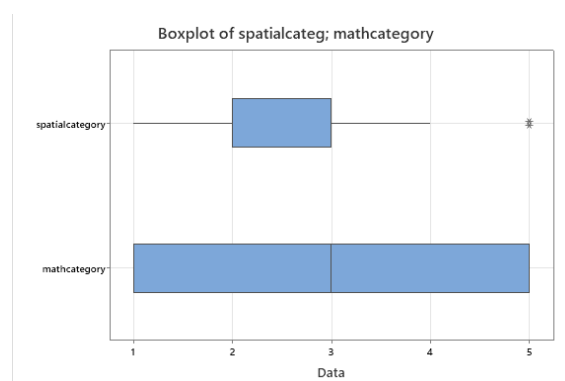
Spatial category esetén a szórás viszonylag alacsony, tehát az adatok közel vannak az átlaghoz. Az AD értéke meglehetősen magas, jelezve, hogy az adatok nem követnek normális eloszlást. A p-érték $<0,0005$, ami azt jelenti, hogy nagyon kicsi az esélye annak, hogy az adatok normális eloszlásúak. Ennél a kategóriánál elutasítjuk a normális eloszlás hipotézisét.

Math category esetén a szórás magas, ami adatváltozékonyságot jelez. Az AD értéke magas, jelezve, hogy az adatok nem követnek normális eloszlást. A p-érték $<0,0005$, ami azt jelenti, hogy nagyon kicsi az esélye annak, hogy az adatok normális eloszlásúak. Ennél a kategóriánál is elutasítjuk a normális eloszlás hipotézisét.

A szórás alapján a matematikai képességek nagyobb változatosságot mutatnak, mint a térbeli képességek. Az Anderson-Darling statisztika mindkét esetben nagyon magas, ami arra utal, hogy az adatok jelentős eltéréseket mutatnak a normális eloszlástól. A nagyon alacsony P-értékek mindkét esetben azt jelzik, hogy szignifikáns bizonyíték van arra, hogy az adatok nem követik a normális eloszlást.

Összefoglalva, a probability plot eredményei alapján megállapítható, hogy sem a térbeli kategória, sem a matematikai kategória adatai nem követik a normális eloszlást. Emiatt a korrelációelemzés során figyelembe kell venni, hogy az előfeltételek (normális eloszlás) nem teljesülnek.

Homogenitás vizsgálata: Az ANOVA – Egyenlő szórás tesztjét használva a Levene teszt eredménye azt mutatja, hogy az alacsony p-érték alapján a csoportok közötti változatosság nem homogén. A csoportok közötti szórások nagyon különbözőek.



3. ábra
Doboz diagram

A minta méretének és leíró statisztikáinak vizsgálata: A minta mérete mindkét változó esetében $N = 181$.

A spatial category esetében az átlag 2,7182; az átlag standard hibája 0,0593; a szórás 0,7980; a szórnégyzet 0,6368; a változékonyság 29,36%; a minimum 1; az első kvartilis 2; a medián 3; a harmadik kvartilis 3; a maximum 5; a tartomány 4, az interkvartilis tartomány 1.

A math category esetében az átlag 3,0442; az átlag standard hibája 0,1361; a szórás 1,8312; a szórnégyzet 3,3535; a változékonyság 60,16%; a minimum 1; az első kvartilis 1; a medián 3; a harmadik kvartilis 5; a maximum 5; a tartomány 4, az interkvartilis tartomány 4.

Az átlag standard hibája azt mutatja meg, hogy az átlag mennyire megbízhatóan becsülhető. A szórás az értékek szóródását mutatja meg az átlagtól. A változékonyság a változó relatív szórását mutatja az átlaghoz képest. Az első kvartilis az adatok alsó 25%-ának az értékét mutatja. A medián az adatok középső értéke. A harmadik kvartilis az adatok felső 25%-ának értékét mutatja. A tartomány a legnagyobb és a legkisebb érték közötti különbséget mutatja, míg az interkvartilis tartomány az első és harmadik kvartilis közötti távolságot jelzi.

Korrelációs elemzés

Mivel az előfeltételek nem minden esetben teljesülnek és a Pearson korrelációs együttható értékelése ezekre épül, így nem parametikus korrelációs vizsgálatként a Spearman rangkorrelációt választottam. Ez az eljárás nem igényli az adatok normális eloszlását és robusztusabb a kiugró értékekkel szemben. A Spearman rangkorreláció értéke $[-1;1]$ tartományba esik. Ha az együttható közel van a -1 -hez, akkor erős negatív korreláció van a változók között. Ha az együttható a 0 -hoz van közel, az azt jelenti, hogy nincs vagy nagyon gyenge a korreláció a változók között. Ha az együttható a $+1$ -hez van közel, akkor erős pozitív korreláció van a változók között. A P -érték azt mutatja, hogy a megfigyelt korreláció mennyire valószínűtlen. Ha a P -érték alacsony (általában $0,005$ alatt), akkor a megfigyelt korreláció valószínűleg statisztikailag szignifikáns.

Pairwise Spearman Correlations

Sample 1	Sample 2	N	Correlation	95% CI for ρ	P-Value
mathcategory	spatialcategory	181	0,083	(-0,063; 0,227)	0,264

4. ábra

Páros Spearman korrelációs vizsgálat eredménye

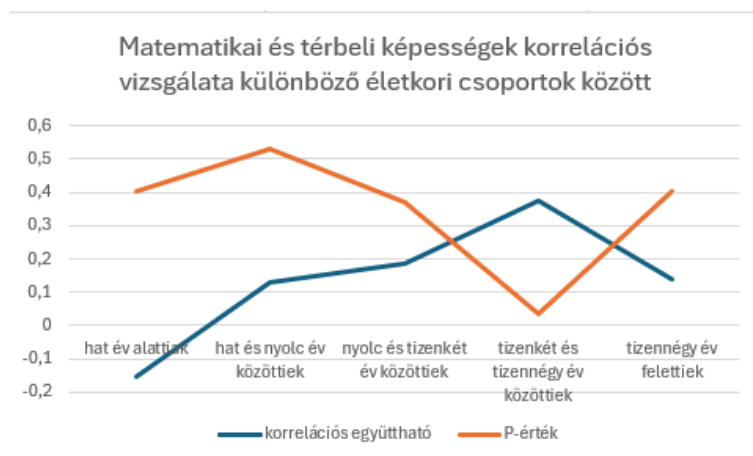
Az $N = 181$ érték az adatpárok számát jelöli. A $\text{Correlation} = 0,083$ érték a Spearman rangkorreláció együtthatója. Ez az érték alacsony, ami arra utal, hogy a két változó között csak gyenge korreláció van. A $95\% \text{ CI for } P = (-0,063;0,227)$ intervallum azt jelzi, hogy a valószínűségi szint 95% -os biztonsággal tartalmazza a valós korrelációs együtthatót a két változó között. Mivel ez az intervallum tartalmazza a nullát, ez tovább erősíti a gyenge korreláció jelenétét. A $P\text{-Value} = 0,264$ azt mutatja, hogy milyen valószínűtlen lenne a megfigyelt korreláció, ha a valóságban nem lenne korreláció a két változó között. Itt láthatóan nem található szignifikáns korreláció a két változó között, mivel a P -érték magasabb, mint a jelentőségi szint (általában $0,005$).

Ezek az eredmények arra utalnak, hogy ennek a kutatásnak az eredményeiben a matematika és térbeli kategória változók között csak gyenge, nem szignifikáns korreláció van. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben ezek a változók valószínűleg függetlenek egymástól.

Eredmények összehasonlítása különböző csoportok között

Ahhoz, hogy össze tudjam hasonlítani a különböző csoportokat, életkor szerint külön bontottam az adatokat és így a következő csoportokat kaptam: hat év alattiak (31 fő), hat és nyolc év közöttiek (26 fő), nyolc és tizenkét év közöttiek (25 fő), tizenkét és tizennégy év közöttiek (31 fő), tizennégy év feletiek (37 fő). Az előfeltételeket mindegyik csoportnál megvizsgáltam és azok eredményétől függően választottam meg a megfelelő korrelációs vizsgálatot.

	hat év alattiak	hat és nyolc év közöttiek	nyolc és tizenkét év közöttiek	tizenkét és tizennégy év közöttiek	tizennégy év feletiek
N	31	26	25	31	37
lineáris kapcsolat	nem lineáris	nem lineáris	nem lineáris	nem lineáris	nem lineáris
normális eloszlás	nem követ normális eloszlást	nem követ normális eloszlást	nem követ normális eloszlást	nem követ normális eloszlást	nem követ normális eloszlást
homogenitás	nem homogén	homogén	homogén	homogén	nem homogén
választott korrelációs vizsgálat	Spearman	Spearman	Spearman	Spearman	Spearman
korrelációs együttható	-0,156	0,129	0,186	0,375	0,141
95% CI for P	(-0,485;0,212)	(-0,274;0,493)	(-0,229;0,544)	(0,011;0,651)	(-0,193;0,446)
P-érték	0,403	0,530	0,372	0,037	0,405
korreláció a két változó között	enyhe negatív, nem szignifikáns	enyhe pozitív, nem szignifikáns	enyhe pozitív, nem szignifikáns	pozitív, szignifikáns	enyhe pozitív, nem szignifikáns



5. ábra

Az eredmények elemzése során azt tapasztaltam, hogy az életkori csoportok között változhat a vizsgált változók közötti kapcsolat erőssége és mértéke. A hat év alattiaknál enyhe negatív, de nem szignifikáns a korreláció. A hat és nyolc év közöttiekénél már enyhe pozitív, de még mindig nem szignifikáns a kapcsolat. A nyolc és tizenkét év közöttiek csoportjánál a korrelációs együttható tovább nő, de nem szignifikáns. A tizenkét és tizennégy év közöttiek csoportjánál szignifikáns pozitív kapcsolat van a változók között. Azonban a tizennégy év felettek csoportjánál ismét alacsony, nem szignifikáns kapcsolat van.

Ezek az eredmények arra utalnak, hogy az életkor hatással lehet a vizsgált változók közötti kapcsolatokra és azok szignifikanciájára. Ez fontos lehet például az oktatási vagy pszichológiai kutatásokban, ahol az életkori sajátosságok fontos szerepet játszhatnak a vizsgált jelenségek megértésében.

Összegzés

A statisztikai elemzés során a Minitab szoftvert használtam. A korrelációs elemzéshez Kinnari és társai által 2021-ben végzett metaanalízis adatait használtam. Az előfeltételek vizsgálata során megállapítottam, hogy az adatok nem minden esetben teljesítik a normális eloszlás és homogenitás feltételeit, ezért a korrelációs elemzéshez a Spearman rangkorrelációt alkalmaztam.

Az elemzésem során azt tapasztaltam, hogy ebben az adathalmazban a matematikai és térbeli kategóriák között csak gyenge, nem szignifikáns korreláció volt megfigyelhető. Az életkor szerinti csoportokra bontott elemzés azt mutatta, hogy az életkornak van hatása a vizsgált változók közötti kapcsolat erősségére és szignifikanciájára. A legfiatalabb csoportban enyhe negatív, míg a legidősebb korcsoportban enyhe pozitív korreláció volt megfigyelhető, de ezek nem voltak szignifikánsak.

Ezek az eredmények arra utalnak, hogy az életkor befolyásolhatja a matematikai és térbeli képességek közötti kapcsolatokat, és fontos figyelembe venni az életkori sajátosságokat az ilyen jellegű kutatásokban és az oktatási gyakorlatban is.

Értékelés és további kutatási irányok

A kutatás korlátjai és hiányosságai

A bemutatott kutatások összességében egyetértenek abban, hogy a matematikai és térbeli készségek között szoros kapcsolat áll fenn. Az elmúlt években végzett számos vizsgálat arra irányult, hogy feltárja ezen két készségterület közötti összefüggéseket és kölcsönhatásokat, valamint megállapítsa, hogy milyen módon befolyásolják egymást.

A két készségterület közötti kapcsolat több szempontból is érdekes. Egyrészt, az a tény, hogy ez a kapcsolat már fiatal korban is megfigyelhető, azt sugallja, hogy a két készségterület fejlődése valamilyen módon összekapcsolódik, és lehet, hogy ugyanazok az alapvető kognitív folyamatok vagy képességek felelősek mindkét területen. Másrészt pedig az az információ, hogy a térbeli készségek fejlesztése közvetlenül vagy közvetetten hozzájárulhat a matematikai teljesítmény javulásához, fontos implikációkkal bír az oktatás és pedagógia terén.

Mindazonáltal, néhány hiányosság és korlát is felfedezhető a kutatásokban, amit érdemes észben tartani az adatok elemzése folyamán. Az első ilyen a korlátozott mintavétel, ugyanis a kutatások nagy része csak egy bizonyos életkori vagy kulturális csoportot vizsgál, ezáltal nem feltétlenül lehet általános következtetéseket levonni belőle, mivel több kutatás is bizonyította, hogy a szociális-kulturális háttér befolyásolja a két készségterület közötti kapcsolat erősségét. A második a kulturális kontextusok figyelmen kívül hagyása, ugyanis a kutatások egy-egy oktatási és kulturális környezetre korlátozódtak. A harmadik a mérési módszerek monotonitása, ugyanis lehetséges, hogy egy bizonyos típusú tréning hatásos, de hiányzik a hosszú távú hatékonyságának megfigyelése vagy más tréningek hatásának teljeskörű értékelése. A negyedik korlát a helyszínek és időbeli korlátok, mivel sok kutatás csak egyetlen helyszínen vagy időszakban zajlott, így nem teszi lehetővé az időbeli vagy térbeli változékonyság teljes körű elemzését. Az ötödik ilyen korlát az egyéb tényezők, mint például a verbális képességek figyelmen kívül hagyása, amik szintén befolyásolhatják a két készségterület közötti kapcsolatot.

Ezek a korlátok és hiányosságok nem csökkentik a bemutatott kutatások értékét, de fontos szem előtt tartani őket a további kutatások tervezése és értékelése során.

Lehetséges további kutatási területek és irányok

A kutatások áttekintése alapján számos lehetséges kutatási terület és irány kínálkozik a matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolat további megértése érdekében. A már elindult

irányok esetében a nemek és kézírányultsági csoportok közötti különbségek további vizsgálata segíthetne annak a megértésében, hogy ezek a különbségek hogyan befolyásolják az oktatást és a fejlesztési programokat. A térbeli tréningek alkalmazása során jelentkező hosszabb távú eredmények vagy másféle tréningek hatása a különböző korcsoportokra fontos információkat szolgáltatna az oktatás számára. A különböző társadalmi és kulturális csoportokba tartozó emberek bevonása a kutatásokba rávilágíthatna arra, hogy hogyan befolyásolják ezek a tényezők a két készségterület közötti kapcsolatot.

Az új irányok között érdemes lenne megvizsgálni a technológiai eszközök, különösen a virtuális és kiterjesztett valóság alkalmazásának hatását a térbeli-matematikai képességekre, fókuszálva a fiatalabb generációkra. A genetikai és környezeti tényezők befolyásának mértéke is fontos terület lehet a két készségterület kapcsolatának és fejlődésének megértése szempontjából. A neurokognitív folyamatos szerepének vizsgálata a matematikai teljesítményben, valamint az életkori változások szerepének feltérképezése a matematikai teljesítményben hosszú távú kutatásokon keresztül segíthetne a két készségterület kapcsolatának jobb megértésében. Az oktatási stratégiák között a térbeli szimulációk és más közvetlen oktatási módszerek hatását a matematikai megértésre és teljesítményre is vizsgálni kellene. Emellett fontos lenne azonosítani és megérteni a szociokulturális és gazdasági tényezők, mint például a családi háttér szerepét a matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolatban.

Ezek az irányok további lehetőségeket kínálnak a matematikai és térbeli képességek közötti kapcsolatok mélyebb megértésére, és az oktatás, valamint a fejlesztés hatékonyabbá tételére. A jövőbeli kutatásoknak ezekre a területekre is érdemes lenne fókuszálniuk annak érdekében, hogy átfogóbb képet alkothassanak erről a fontos témakörrel.

Összegzés és zárás

A kutatás főbb eredményeinek összefoglalása

A kutatás főbb eredményei között szerepelnek a matematikai gondolkodás fejlődését befolyásoló tényezők, mint például a kognitív képességek, az oktatási tapasztalatok, az egyéni érdeklődés és a motiváció, valamint a szociális és kulturális hatások. Az absztrakciós, logikai és érvelési készségek fejlődése elengedhetetlen a matematikai gondolkodás alapjaihoz, melyek lehetővé teszik az elvont fogalmak és összefüggések megértését. Az óvodai és iskolai oktatás, a gyakorlati alkalmazások, valamint a szociális és kulturális kontextus mind hozzájárulnak a matematikai gondolkodás fejlődéséhez.

A térbeli érzékelés és vizualizáció szintén kulcsfontosságú kognitív képességek, melyek befolyásolják az egyén matematikai teljesítményét és mindennapi életben való boldogulását. A térbeli érzékelés lehetővé teszi az egyén számára, hogy érzékelje és megértse a térbeli kapcsolatokat, míg a vizualizáció lehetővé teszi, hogy manipulálja és ábrázolja a térbeli információkat. Ezek a képességek kiemelkedő fontossággal bírnak a gazdasági és technológiai területeken, például a logisztikában, a mérnöki tervezésben és a szoftverfejlesztésben.

A kutatások azt mutatják, hogy a matematikai és térbeli képességek között szoros kapcsolat van, és a térbeli készségek fejlesztése közvetlenül vagy közvetve javíthatja a matematikai teljesítményt. Fontos azonban figyelembe venni a nemek és a kézírányultság csoportok közötti különbségeket az oktatási gyakorlatban és a személyes fejlődés támogatásában. A kutatások eredményei alapján az is kiderül, hogy az életkor befolyásolhatja a matematikai és térbeli képességek közötti kapcsolatot. Az életkor szerinti csoportokra bontott elemzések azt mutatják, hogy az életkor változása hatással van a kapcsolat erősségére és szignifikanciájára.

Összességében a kutatásokból kiderül, hogy a matematikai és térbeli képességek fejlesztése kulcsfontosságú az egyéni és gazdasági sikerek szempontjából, és az oktatási rendszernek, valamint a vállalatoknak figyelembe kell venniük ezeket a tényezőket a fejlődés és a versenyképesség elősegítése érdekében.

A kutatás tanulságai és jelentősége a kutatási terület számára

A kutatás motivációja és háttere az emberi elme matematikai és térérzékelési képességei közötti kapcsolat iránti kíváncsiság. Személyes motivációm az volt, hogy saját tapasztalataim alapján éreztem, hogy a matematikai képességek és a térbeli érzékelés közötti kapcsolat és különbségek érdekesek lehetnek, különösen a nemek tekintetében.

A kutatás célja a matematikai és térérzékelési készségek közötti összefüggések és kapcsolatok vizsgálata volt, különös tekintettel arra, hogy az egyik készség fejlesztése hogyan befolyásolja a másikat. A hipotézisem az volt, hogy létezik valamilyen kapcsolat a két készség között, különösen a nemekre vonatkozóan.

A kutatás eredményei alátámasztották a korábbi kutatásokat, miszerint létezik kapcsolat a matematikai és térbeli készségek között, bár a korreláció nem mindig volt erős és szignifikáns. Az életkor befolyásolta a kapcsolat erősségét és irányát, amit fontos figyelembe venni az oktatási gyakorlatban és a további kutatásokban.

A kutatás jelentősége az, hogy hozzájárul a matematikai és térbeli képességek közötti összefüggések jobb megértéséhez, ami fontos lehet az oktatás és személyes fejlődés terén. Az eredmények alkalmazhatók az oktatási gyakorlatban, különösen a nemek közötti különbségek és az életkor sajátosságainak figyelembevételével. Emellett a kutatás a gazdasági területeken is releváns, ahol a matematikai és térbeli képességek fontos szerepet játszanak az innováció és versenyképesség terén.

A további teendők és kilátások a matematikai és térbeli készségek kutatásában

A matematikai és térbeli készségek kutatásában további lépéseket kell tenni annak érdekében, hogy még teljesebb képet kapjunk ezeknek a képességeknek az összefüggéseiről és jelentőségéről. Fontos folytatni a longitudinális vizsgálatokat, amelyek hosszú távú adatokat gyűjtenek a matematikai és térbeli képességek fejlődéséről az idő múlásával. Ezek az adatok teszik lehetővé, hogy jobban megértsük, hogyan alakulnak ezek a képességek az életkor és a tapasztalat függvényében. Emellett a jövőbeli kutatásoknak összpontosítaniuk kell az oktatási gyakorlatok hatékonyságának vizsgálatára. Fontos megérteni, hogy milyen típusú tanítási módszerek és környezeti tényezők segíthetik leginkább elő a matematikai és térbeli képességek fejlődését, különös tekintettel a különböző korcsoportok és csoportok közötti eltérésekre.

Az interdiszciplináris megközelítésnek is kiemelt szerepet kell kapnia a jövőbeni kutatásokban. A matematikai és térbeli készségek összefüggéseinek és hatásainak teljes megértéséhez szükség van pszichológiai, neveléstudományi, matematikai és térinformatikai szakértők együttműködésére. Az ilyen típusú multidiszciplináris kutatások lehetővé teszik számunkra, hogy átfogóbb és pontosabb képet kapjunk ezekről a komplex kognitív folyamatokról.

Végül, de nem utolsósorban, a további kutatásoknak figyelembe kell venniük a technológia fejlődésének hatásait is. Az új technológiai eszközök és alkalmazások lehetőséget kínálnak a matematikai és térbeli készségek fejlesztésére interaktív és innovatív módon. Fontos folytatni

a kutatásokat ezen a területen annak érdekében, hogy kihasználjuk az új technológiák nyújtotta lehetőségeket a kognitív fejlődés támogatása érdekében.

Irodalomjegyzék

- A matematikai alapképességek, a matematikai gondolkodás fejlődése 6-48 éves korban (az OTKA38246 számú kutatás záróbeszámolója, 2006)
- Ana R. Delgado, Gerardo Prieto: Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence* Volume 32, Issue 1, January–February 2004, Pages 25-32.
- Atit Kinnari, Power Jason Richard, Pigott Terri, Lee Jihyun, Geer Elyssa A., Uttal David H., Ganley Colleen M., Sorby Sheryl A.: Examining the relations between spatial skills and mathematical performance: A meta-analysis. *Psychonomic Bulletin & Review*. (2022) 29:699–720.
- Carroll, J. B. Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies (1993) 362
- Casey, M. B., Pezaris, E. & Nuttall, R. L. (1992) Spatial ability as a predictor of math achievement: The importance of sex and handedness patterns. *Neuropsychologia* 30, 35–45.
- Gustafsson, J. E., & Undheim: Individual differences in cognitive functions, *Handbook of educational psychology* (1996)
- Gyarmathy Éva: Kognitív profil teszt és képességfejlesztés
- Harle, M., & Towns, M. (2011). A review of spatial ability literature, its connection to chemistry, and implications for instruction. *Journal of Chemical Education*, 88 (3), 351–360.
- Influence of design training and spatial solution strategies on spatial ability performance. *Technology and Design Education*. Volume 26, pages 123–131, (2016)
- Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985): Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development* 56(6), 1479-1498
- McGee, M. G. (1979): Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences, *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918
- Ming Tsui, Edmond Venator, Xu Xiaoying: Mental Rotation Test Performance of Chinese Male and Female University Students. *Chinese Studies*, Vol.3 No.2, May 7, 2014.
- Nagy József: A kritikus kognitív készségek és képességek kritériumorientált fejlesztése (2000)
- Newcombe, N.S., & Shipley, T.F.: Thinking about spatial thinking: New typology, new assessments. *Studying Visual and Spatial Reasoning for Design Creativity*, (2015) 179-192

- Shea, D. L., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2001). Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents: A 20-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 604–614
- Xiao Zhang, Dan Lin: Does growth rate in spatial ability matter in predicting early arithmetic competence? *Learning and Instruction*. Volume 49, June 2017, Pages 232-241

**PANNON EGYETEM
GAZDÁLKODÁSI KAR ZALAEGERSZEG**

SZERZŐI ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat címe: A matematikai és a térbeli készségek közötti kapcsolat elemzése	
Hallgató neve: Drizner Beáta	NEPTUN kód: Z4HGOD
Képzési szint: alapképzés	
Szak: Gazdaságinformatikus	Szakirány: Logisztikai informatikus
Témavezető neve: Dr. Szűcs Judit, PhD	Beosztása: adjunktus
Tanszék: Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kar - Informatikai Rendszerek és Alkalmazásai Tanszék	

A dolgozatom fő célja annak a vizsgálata, hogy létezik-e és ha igen, akkor milyen jellegű kapcsolat van a matematikai és térérzékelési képességek között, valamint, hogy a nemek befolyásolják-e ezen képességek kialakulását és kapcsolatát. Továbbá azt is kutatom, hogy az egyik képesség fejlesztése javíthatja-e a másik képességet. A kutatás célkitűzései közé tartozik a matematikai gondolkodás kialakulásának folyamata, a térbeli érzékelés és vizualizáció, a térbeli problémamegoldás és navigáció elemzése, valamint a korábbi kutatások áttekintése és statisztikai elemzése. A matematikai és térbeli készségek alapvető szerepet játszanak mindennapi életünkben és szakmai tevékenységeinkben. A matematikai képességeket a mindennapi tevékenységek során, mint a bevásárlás vagy a pénzügyi tervezés alkalmazzuk, míg a térbeli készségekre navigáció, járművezetés és tárgyak összeállítása közben van szükség. Az ilyen készségek kulcsfontosságúak a tudományos és technológiai területeken dolgozók számára, különösen a mérnöki munkában és az információtechnológiában. Továbbá, a matematikai és térérzékelési képességek olyan kognitív képességeket fejlesztenek, amelyek messzemenően túlmutatnak a tudományos területeken, elősegítve a logikus és problémamegoldó gondolkodást, valamint az absztrakt gondolkodást és kreativitást. A kutatás eredményei rávilágítanak a matematikai és térbeli készségek közötti kapcsolatokra. A matematikai gondolkodás fejlődését befolyásoló tényezők közé tartoznak a kognitív képességek, tanulási tapasztalatok, egyéni érdeklődés, motiváció, valamint szociális és kulturális hatások. Hasonlóképpen, a térbeli érzékelés és vizualizáció is kulcsfontosságúak az egyén matematikai teljesítménye szempontjából. A kutatások megerősítették, hogy létezik kapcsolat a matematikai és térbeli készségek között, és ezek fejlesztése javíthatja a matematikai teljesítményt, figyelembe véve a nemek és életkor közötti különbségeket. A kutatás hozzájárul a matematikai és térérzékelési képességek közötti összefüggések jobb megértéséhez, ami fontos lehet az oktatás és személyes fejlődés szempontjából. Az eredmények alkalmazhatóak az oktatási gyakorlatban, különös tekintettel a nemek közötti különbségek és az életkor sajátosságainak figyelembevételével. Emellett a kutatás releváns a gazdasági területeken is, ahol ezek a készségek fontos szerepet játszanak az innováció és versenyképesség terén.